

## МЕТОД ОЦЕНКИ ПЕРЕПАДОВ ТЕМПЕРАТУРЫ И ВЛАГОСОДЕРЖАНИЯ ПРИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СУШКЕ ОБРАЗЦА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

А.М. Афанасьев, Г.А. Попов, Б.Н. Сипливый

Анатолий Михайлович Афанасьев \*, Глеб Александрович Попов

Кафедра Информационной безопасности, Институт приоритетных технологий, Волгоградский государственный университет, пр. Университетский, 100, Волгоград, Российская Федерация, 400062

E-mail: a.m.afanasiev@yandex.ru\*, elvpri@mail.ru

Борис Николаевич Сипливый

Кафедра теоретической физики и волновых процессов, Физико-технический институт, Волгоградский государственный университет, пр. Университетский, 100, Волгоград, Российская Федерация, 400062

E-mail: tf@volsu.ru

*Аналитическими методами исследован процесс удаления влаги из образца произвольной формы, находящегося в рабочей камере установки для сушки электромагнитными волнами. Образец обдувается потоком воздуха и подвергается воздействию двух видов излучений, имеющих большую и, соответственно, малую по сравнению с размерами образца глубину проникновения; для повышения равномерности обдува и тепловой обработки осуществляется вращательное движение образца. В качестве математической модели сушки использованы уравнения теории тепломассопереноса А.В. Лыкова в среде с постоянными теплофизическими коэффициентами. С помощью преобразований трех видов – осреднения по времени оборота, осреднения по координатам и перехода к асимптотике по времени – исходные уравнения приведены к виду, содержащему лишь числовые характеристики функций. На основе этих соотношений предложены формулы для величин, названных характерными перепадами температуры и влагосодержания, которые характеризуют степени неоднородности соответствующих полей. Введенные перепады зависят от теплофизических параметров материала, характерного размера образца (для шара – диаметр), а также от мощностей генераторов электромагнитных волн с большой и с малой глубиной проникновения. В случае шара характерные перепады дают точные значения разности температур и разности влагосодержаний между поверхностью шара и его центром. Результаты работы позволяют организовать электромагнитную сушку, в которой при высокой интенсивности испарения влаги с поверхности образца не происходит перегрева материала (возникает за счет большого перепада температуры) или его разрушения от механических деформаций (возникает за счет большого перепада влагосодержания).*

**Ключевые слова:** уравнения Лыкова; электромагнитная сушка; образец произвольной формы; характерные перепады температуры и влагосодержания

## METHOD OF EVALUATING CHANGES IN TEMPERATURE AND MOISTURE CONTENT USING ELECTROMAGNETIC DRYING OF SAMPLE OF ARBITRARY SHAPE

A.M. Afanasiev, G.A. Popov, B.N. Siplivy

Anatoly M. Afanasiev\*, Gleb. A. Popov

Department of Information Security, Institute of Priority Technologies, Volgograd State University, University ave., 100, Volgograd, 400062, Russia

E-mail: a.m.afanasiev@yandex.ru\*, elvpri@mail.ru

Boris N. Siplivy

Department of Theoretical Physics and Wave Processes, Physico-Technical Institute, Volgograd State University, University ave., 100, Volgograd, 400062, Russia

E-mail: tf@volsu.ru

*Analytical methods were used to study the process of removing moisture from the sample of arbitrary shape, located in the working chamber of the installation for drying by electromagnetic waves. The sample is blown by the air flow and exposed to two types of radiation, having a large and, accordingly, small compared to the size of the sample penetration depth. To increase the uniformity of blowing and heat treatment, the sample is rotated. The equations of heat and mass transfer theory are used as a mathematical model of drying Lykov in a medium with constant thermal coefficients. Using transformations of three types - averaging over turnaround time, averaging over coordinates, and transition to time asymptotics - the original equations are reduced to a form that contains only numerical characteristics of functions. On the basis of these relations, formulas for the values called characteristic temperature and moisture content differences, which characterize the degree of heterogeneity of the corresponding fields, are proposed. The introduced differences depend on the thermophysical parameters of the material, the typical size of the sample (for the ball – diameter), as well as on the power of generators of electromagnetic waves with a large and small penetration depth. In the case of a ball, the characteristic differences give the exact values of the temperature difference and the moisture content difference between the surface of the ball and its center. The results of the work allow to organize electromagnetic drying, in which at a high intensity of moisture evaporation from the surface of the sample there is no overheating of the material (due to a large temperature drop) or its destruction from mechanical deformations (due to a large difference in moisture content).*

**Key words:** Lykov equations, electromagnetic drying, arbitrary shape sample, characteristic temperature and moisture content differences

**Для цитирования:**

Афанасьев А.М., Попов Г.А., Сипливый Б.Н. Метод оценки перепадов температуры и влагосодержания при электромагнитной сушке образца произвольной формы. *Изв. вузов. Химия и хим. технология*. 2019. Т. 62. Вып. 10. С. 131–139

**For citation:**

Afanasiev A.M., Popov G.A., Siplivy B.N. Method of evaluating changes in temperature and moisture content using electromagnetic drying of sample of arbitrary shape. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.* 2019. V. 62. N 10. P. 131–139

**ВВЕДЕНИЕ**

Вопросу моделирования процессов тепло- и массопереноса при сушке влажных материалов электромагнитным излучением уделяется большое внимание в литературе по химическим технологиям [1-6]. Одна из проблем организации режимов сушки с наперед заданными свойствами состоит в следующем. Для повышения скорости сушки приходится повышать интенсивность излучения. Это сопровождается увеличением перепадов температуры и влагосодержания по глубине материала. Но большие перепады температуры могут привести к *перегреву* материала, а большие перепады влагосодержания – к его *разрушению* от механических деформаций. Ввиду этого ставится задача об организации таких режимов, в которых при максимально возможной интенсивности сушки перепады температуры и влагосодержания снижены до безопасного уровня. Чтобы такой режим осуществить, следует располагать алгоритмами, аналитическими или численными, для расчета указанных величин. В настоящей статье будут рассматриваться аналитические алгоритмы. Для тел с простейшей геомет-

рией – пластины, цилиндра с прямоугольным сечением, прямоугольного параллелепипеда, цилиндра с круговым сечением и шара – алгоритмы расчета перепадов уже разработаны авторами, соответственно в статьях [7-11]. В настоящей статье точные формулы для перепадов из этих работ впервые обобщаются в виде приближенных формул для образцов с произвольной геометрией.

*Схема установки*

Одна из применяемых на практике схем сушки изображена на рисунке (например, такую конструкцию имеют микроволновые бытовые печи с грилем). Рабочей камерой устройства является объемный резонатор, в котором расположены два генератора электромагнитных волн, сверхвысокочастотного (СВЧ) и инфракрасного (ИК) диапазонов. Обычно можно считать, что СВЧ излучение, обладая большой проникающей способностью, индуцирует источники тепла, распределенные по всему объему образца; в противоположность этому, источники тепла, вызванные поглощением ИК излучения, распределяются в тонком поверхностном слое материала. Находящийся под воздействием этих двух видов излучения влажный обра-

зец с помощью специального устройства приводится во вращение, чем достигается равномерность термообработки. Для отвода окружающих образец водяных паров его обдувают потоком воздуха.

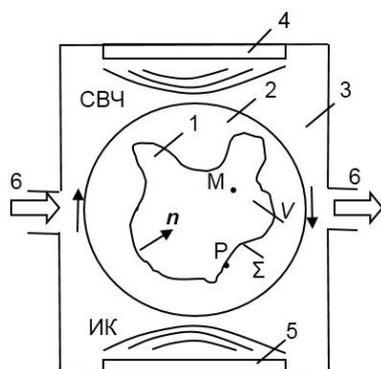


Рис. Установка для сушки электромагнитным излучением: 1 – влажный образец; 2 – вращающийся столик; 3 – объемный резонатор; 4 – СВЧ излучатель; 5 – ИК излучатель; 6 – воздушный поток

Fig. Set up for drying by electromagnetic radiation: 1 – wet sample; 2 – rotating table; 3 – volume resonator; 4 – microwave emitter; 5 – IR emitter; 6 – air flow

*Математическая модель электромагнитной сушки*

Обратимся к процессам, происходящим в рабочей камере установки для сушки излучением. Влажный образец – тело  $V$  с границей  $\Sigma$  – обдувается воздушным потоком и подвергается воздействию электромагнитных волн. Переменные точки в области  $V$  и на поверхности  $\Sigma$  будем обозначать соответственно, как  $M$  и  $P$ . За счет поглощения электромагнитной энергии внутри образца возбуждаются процессы нагревания материала и испарения жидкости. Вследствие этого возникают тепловые потоки и потоки влаги как внутри образца, так и с его поверхности. Внутренний перенос тепла происходит по закону теплопроводности Фурье, а внутренний перенос влаги – по закону влагопроводности А.В. Лыкова: часть влаги перемещается в виде жидкости, часть – в виде пара, и вызывается это движение градиентами влагосодержания и температуры (диффузия и термодиффузия). Движение влаги может происходить также и под действием градиента давления влажного воздуха внутри пор (массоперенос по закону фильтрации Дарси). Однако эта составляющая потока влаги вносит заметный вклад в общий поток лишь при температуре материала, близкой к температуре кипения воды, и учитывать ее здесь мы не будем.

Обозначим

$$T = T(M, \tau), U = U(M, \tau) -$$

температура тела [°C] и его влагосодержание

[кг/кг] как функции точки  $M$  и времени  $\tau$  [с]. Положение точки будем задавать ее координатами в системе, жестко скрепленной с вращающимся телом. При условии, что теплофизические характеристики материала могут считаться постоянными, начально-краевая задача для расчета полей  $T$  и  $U$  будет формулироваться следующим образом [12, 13]:

$$c\rho_0(\partial T/\partial \tau) = \lambda \cdot \nabla^2 T + r\gamma\rho_0(\partial U/\partial \tau) + W; \quad M \in V; \quad (1)$$

$$\partial U/\partial \tau = a_m \delta \cdot \nabla^2 T + a_m \cdot \nabla^2 U; \quad M \in V; \quad (2)$$

$$\lambda \cdot \partial T/\partial n = r(1 - \gamma)J + Q - S; \quad P \in \Sigma; \quad (3)$$

$$\delta \cdot \partial T/\partial n + \partial U/\partial n = J/(a_m \rho_0); \quad P \in \Sigma; \quad (4)$$

$$T(M, 0) = f_1(M); \quad U(M, 0) = f_2(M); \quad \tau = 0. \quad (5)$$

Здесь (1) и (2) – уравнения распространения тепла и влаги в области  $V$ ; (3) и (4) – краевые условия на поверхности  $\Sigma$ ; (5) – начальные условия при  $\tau = 0$ , где  $f_1(M)$  и  $f_2(M)$  – некоторые заданные функции координат. В этих уравнениях:  $W$  [Вт/м³] и  $S$  [Вт/м²] – плотности объемных и поверхностных источников тепла, возникающих за счет работы генераторов электромагнитных волн СВЧ и ИК диапазонов соответственно (представление о поверхностных источниках тепла введено в статье авторов [13]);  $c, \rho_0, \gamma, \lambda, a_m, \delta$  – теплофизические характеристики материала (удельная теплоемкость [Дж/(кг·°C)], плотность в сухом состоянии [кг/м³], критерий испарения, коэффициент теплопроводности [Вт/(м·°C)], коэффициент диффузии влаги [м²/с], относительный коэффициент термодиффузии влаги [1/°C]);  $r$  – удельная теплота парообразования воды [Дж/кг];  $\partial \partial n$  – символ производной по направлению внутренней нормали к границе  $\Sigma$ ;  $Q$  и  $J$  – интенсивность теплообмена [Вт/м²] и интенсивность массообмена [кг/(м²·с)] поверхности  $\Sigma$  с воздушной средой, которые в каждой точке  $P$  рассчитываются по формулам

$$Q(P, \tau) = \alpha_w [T(P, \tau) - T_b] + \sigma \tilde{A} [(T(P, \tau) + T_1)^4 - (T_b + T_1)^4]; \quad (6)$$

$$J(P, \tau) = \alpha_m [G(T(P, \tau)) - \phi \cdot G(T_b)]. \quad (7)$$

В этих формулах  $T_b$  и  $\phi$  – температура и влажность воздуха вблизи точки  $P$  за пределами пограничного слоя;  $\sigma$  – постоянная Стефана-Больцмана [Вт/(м²·°C⁴)];  $\tilde{A}$  – коэффициент теплового излучения;  $G(T)$  – функция, моделирующая зависимость относительного парциального давления насыщенного водяного пара от его температуры  $T$ ;  $T_1 = 273$  °C – постоянная;  $\alpha_w(V)$  и  $\alpha_m(V)$  – коэффициенты тепло- и массообмена поверхности образца с воздушной средой (соответственно [Вт/(м²·°C)] и [кг/(м²·с)]), которые сложным образом зависят от скорости воздуха  $V$  вблизи точки  $P$ . Вид функции  $G(T)$  можно найти в [14]; там же приводятся и фор-

мулы для коэффициентов  $\alpha_w(V)$  и  $\alpha_m(V)$  для некоторых частных случаев.

Поставим задачу дать приближенный анализ электромагнитных процессов и процессов теплопереноса в изображенной на рисунке ситуации. С этой целью подвергнем исходные уравнения преобразованиям, с помощью которых из уравнений последовательно будут исключены координаты и время, и конечным итогом будут новые уравнения, содержащие лишь числовые характеристики всех функций. Рассмотрим подробнее эти процедуры.

*Осреднение по времени оборота, по координатам и переход к асимптотике по времени*

Пусть  $\Delta\tau$  – время одного оборота,  $\Delta V$  – объем тела,  $\Delta\Sigma$  – площадь его поверхности, и  $F(M, \tau)$  – некоторая функция координат и времени. Операции осреднения этой функции по времени оборота, по объему тела и по его поверхности введем следующим образом:

$$\bar{F}(M, \tau) = \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau-\Delta\tau/2}^{\tau+\Delta\tau/2} F(M, \xi) d\xi,$$

$$\langle F \rangle(\tau) = \frac{1}{\Delta V} \iiint_V F(M, \tau) dV_M,$$

$$\langle F \rangle(\tau) = \frac{1}{\Delta\Sigma} \iint_{\Sigma} F(P, \tau) d\Sigma_P.$$

В результате выполнения этих операций все непрерывные функции координат и времени, которые мы рассматриваем, будут заменены на новые непрерывные функции.

Будем считать время  $\Delta\tau$  малым по сравнению с характерными временами изменения полей температуры и влагосодержания. Тогда в результате выполнения операции осреднения по времени оборота получим, что функции  $T$ ,  $U$ , их производные по времени, их лапласианы в области  $V$  и нормальные производные на поверхности  $\Sigma$  существенных изменений не приобретут, т.е. они сохранят свой прежний вид.

Этот результат мы отразили в таблице; так же будем поступать и с последующими результатами.

Переходя к плотности СВЧ потерь  $W$ , примем, что время оборота, в отличие от ситуации с полями температуры и влагосодержания, является большим по сравнению со временем релаксации электромагнитных процессов. Кроме того, будем считать, что способность материала поглощать энергию электромагнитных волн в каждой точке пространства не зависит от температуры и влагосодержания в этих точках. Тогда плотность потерь  $W(M, \tau)$  в каждый момент времени будет опреде-

ляться только текущим расположением образца относительно СВЧ излучателя [15]. Ясно, что зависимость от времени будет периодической, с периодом, равным времени оборота. Выполнив осреднение, получим новую функцию  $\bar{W}(M)$ . Аналогичным образом из функции  $S(P, \tau)$  в результате осреднения получится функция  $\bar{S}(P)$ .

Обсудим теперь условия тепло- и массообмена на поверхности образца. Интенсивность теплообмена  $Q$ , согласно формуле (6), определяется теплообменом конвекцией по закону Ньютона и теплообменом излучением по закону Стефана-Больцмана, а интенсивность массообмена  $J$ , согласно закону испарения Дальтона (7), зависит от перепада парциального давления водяного пара по толщине пограничного слоя. Осредняя функцию  $J(P, \tau)$  по времени оборота, мы учтем, что функция  $G(T(P, \tau))$  за это время не изменяется, переменными оказываются только характеристики воздушного потока вблизи точки  $P$ : его влажность  $\varphi$ , температура  $T_v$  и скорость  $V$ , от которой зависит коэффициент массообмена  $\alpha_m$ . Выполнив осреднение, получим функцию  $\bar{J}(T(P, \tau))$ . Аналогичным образом из функции  $Q(P, \tau)$  после осреднения получится функция  $\bar{Q}(T(P, \tau))$ .

Таким образом, за время оборота функции  $T$  и  $U$  не изменяются; функции  $W$  и  $S$  изменяются за счет изменения ориентации тела относительно излучателей; функции  $Q$  и  $J$  изменяются за счет изменения ориентации тела относительно воздухопроводов.

Осреднение по времени оборота позволило исключить из всех функций осцилляции, связанные с вращением образца. Следующее за ним осреднение по координатам, т.е. по поверхности или по объему, в зависимости от области задания функции, исключит из функций переменные точки  $M$  и  $P$ , и оставит в них только время  $\tau$  (разумеется, если только оно осталось после осреднения по времени оборота). Результаты представлены в таблице и дополнительных пояснений не требуют.

Рассмотрим теперь операцию, позволяющую исключить из осредненных по координатам функций время. Как известно, сушка влажного материала начинается с периода прогрева, за которым следует период постоянной скорости сушки [12]. Исследование периодов постоянной скорости имеет большое значение для практики, поскольку во многих случаях именно в эти промежутки времени из материала удаляется основная часть влаги. Характерными признаками периода постоянной скорости являются стационарность поля темпера-

туры и квазистационарность поля влагосодержания (величина  $U$  уменьшается во времени по линейному закону со скоростью, одинаковой во всех точках и во все моменты). В математической физике решения такого рода называют квазистационарными, или установившимися [16]. Формально поля  $T$  и  $U$  становятся такими лишь асимптотически, т.е. при  $\tau \rightarrow \infty$ , но фактическое время их установления всегда является конечным. Таким образом, для этого режима мы имеем:

$$T(M, \tau) = T_\infty(M); \quad U(M, \tau) = U_\infty(M) + V_\infty \tau. \quad (8)$$

Здесь  $V_\infty = \partial U / \partial \tau = \text{const} < 0$  – скорость сушки, а  $U_\infty(M)$  есть распределение влагосодержания в момент  $\tau = 0$ , который в приведенной формуле мы принимаем за начало установившегося режима. Благодаря стационарности поля  $T$ , отвечающие асимптотическому режиму интенсивности тепло- и массообмена перестают изменяться во времени. Например, функция  $\langle \bar{Q} \rangle(\tau)$ , как это отражено в таблице, преобразуется в постоянную  $\langle \bar{Q} \rangle_\infty$ . Аналогичным образом решается вопрос и об асимптотике функции  $\langle \bar{J} \rangle(\tau)$ .

Таблица

Результаты осреднения функций и асимптотические значения этих величин  
Table. Results of averaging functions and asymptotic values of these values

Исходные функции	Осреднение по времени обзора	Осреднение по координатам	Асимптотика по времени
$\partial T / \partial \tau(M, \tau)$	$\partial T / \partial \tau(M, \tau)$	$\langle \partial T / \partial \tau \rangle(\tau)$	0
$\partial U / \partial \tau(M, \tau)$	$\partial U / \partial \tau(M, \tau)$	$\langle \partial U / \partial \tau \rangle(\tau)$	$V_\infty$
$\nabla^2 T(M, \tau)$	$\nabla^2 T(M, \tau)$	$\langle \nabla^2 T \rangle(\tau)$	$\langle \nabla^2 T \rangle_\infty$
$\nabla^2 U(M, \tau)$	$\nabla^2 U(M, \tau)$	$\langle \nabla^2 U \rangle(\tau)$	$\langle \nabla^2 U \rangle_\infty$
$\partial T / \partial n(P, \tau)$	$\partial T / \partial n(P, \tau)$	$\langle \partial T / \partial n \rangle(\tau)$	$\langle \partial T / \partial n \rangle_\infty$
$\partial U / \partial n(P, \tau)$	$\partial U / \partial n(P, \tau)$	$\langle \partial U / \partial n \rangle(\tau)$	$\langle \partial U / \partial n \rangle_\infty$
$W(M, \tau)$	$\bar{W}(M)$	$\langle \bar{W} \rangle$	$\langle \bar{W} \rangle$
$S(P, \tau)$	$\bar{S}(P)$	$\langle \bar{S} \rangle$	$\langle \bar{S} \rangle$
$Q(T(P, \tau), \tau)$	$\bar{Q}(T(P, \tau))$	$\langle \bar{Q} \rangle(\tau)$	$\langle \bar{Q} \rangle_\infty$
$J(T(P, \tau), \tau)$	$\bar{J}(T(P, \tau))$	$\langle \bar{J} \rangle(\tau)$	$\langle \bar{J} \rangle_\infty$

Выполнив над уравнениями системы (1)-(4) преобразования, перечисленные в таблице, получим новую систему следующего вида:

$$0 = \lambda \cdot \langle \nabla^2 T \rangle_\infty + r \gamma \rho_0 V_\infty + \langle \bar{W} \rangle; \quad (9)$$

$$V_\infty = a_m \delta \cdot \langle \nabla^2 T \rangle_\infty + a_m \cdot \langle \nabla^2 U \rangle_\infty; \quad (10)$$

$$\lambda \cdot \langle \partial T / \partial n \rangle_\infty = r(1 - \gamma) \cdot \langle \bar{J} \rangle_\infty + \langle \bar{Q} \rangle_\infty - \langle \bar{S} \rangle; \quad (11)$$

$$\delta \cdot \langle \partial T / \partial n \rangle_\infty + \langle \partial U / \partial n \rangle_\infty = \langle \bar{J} \rangle_\infty / (a_m \rho_0). \quad (12)$$

Подчеркнем, что в отличие от исходных уравнений, где присутствуют функции координат и времени, здесь мы имеем соотношения между числовыми (интегральными) характеристиками этих функций.

*Характерные перепады  $\Delta T^*$  и  $\Delta U^*$*

Согласно плану работы, прежде всего нас будут интересовать перепады температуры  $\Delta T$  и влагосодержания  $\Delta U$  между внутренними областями материала и его поверхностью. Уточним эти понятия. Прежде всего, будем говорить только об асимптотических режимах, когда, согласно фор-

муле (8), указанные перепады от времени не зависят. Примем, далее, что

$$\Delta T = T(M) - T(P), \text{ где } M \in V, P \in \Sigma -$$

– какие-нибудь две точки, соответственно внутри тела и на его поверхности. Аналогичным образом определим и перепад  $\Delta U$ . Ясно, что введенные перепады будут зависеть от выбора точек  $M$  и  $P$ , что затрудняет использование этих величин как некоторых параметров, с помощью которых можно судить о степени неоднородности полей  $T$  и  $U$ . Переопределим тогда понятия перепадов так, чтобы при новой формулировке возникшее затруднение уже не имело места. С этой целью обратимся к решенной авторами задаче об электромагнитной сушке однородного шара [11]. Если плотности объемных и поверхностных источников тепла являются постоянными, а условия тепло- и массообмена на поверхности шара не зависят ни от координат, ни от времени, то в режиме постоянной скорости сушки стационарное распределение темпе-

ратуры и квазистационарное распределение влагосодержания будут параболическими. Например, для поля влагосодержания мы будем иметь

$$U(r, \tau) = \alpha_1 r^2 + \alpha_2 + V_\infty \tau.$$

Здесь  $r$  – расстояние до центра шара,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – постоянные,  $V_\infty$  – введенная выше скорость сушки, а время, как и в формуле (8), отсчитывается от начала установившегося режима. Перепадом влагосодержания между центром шара и его поверхностью  $r = R$  назовем величину

$$\Delta U = U(0, \tau) - U(R, \tau) = -\alpha_1 R^2.$$

Чтобы дать обобщение перепада  $\Delta U$  для тела произвольной формы, придадим этой формуле другой вид. Вычислим нормальную производную поля  $U$  на поверхности шара (нормаль внутренняя):

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_\Sigma = -\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = -2\alpha_1 R.$$

Сравнивая это с формулой для  $\Delta U$ , получим, что

$$\Delta U = (D/4) \cdot \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_\Sigma.$$

Здесь  $D = 2R$  – диаметр шара. Эта формула связывает существование перепада влагосодержания между центром и поверхностью шара с наличием вполне определенного градиента влагосодержания на поверхности. Имея в виду такой смысл полученного результата, и обращаясь теперь к телу произвольной формы, мы определим величину  $\Delta U^*$  – характерный перепад влагосодержания – формулой

$$\Delta U^* = (D^*/4) \cdot \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_\Sigma. \quad (13)$$

Здесь  $D^*$  – характерный размер тела (для шара – диаметр), а  $\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_\Sigma$  – среднее значение нормальной производной  $\partial U/\partial n$  на поверхности тела. Для тела в форме шара это соотношение имеет точный смысл, как об этом говорилось выше.

Аналогичной формулой введем и характерный перепад температуры:

$$\Delta T^* = (D^*/4) \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_\Sigma. \quad (14)$$

Отметим, что по смыслу всех величин, будем иметь  $\Delta U^* > 0$  и  $\Delta T^* > 0$ , если влагосодержание и, соответственно, температура в среднем возрастают при переходе от поверхности к внутренним областям.

#### Формулы для характерных перепадов

Чтобы найти перепады по формулам (13) и (14), мы должны определить входящие в них средние нормальные производные полей  $T$  и  $U$  на поверхности тела. Обратимся для этого к уравнениям (9)-(12). Решающим обстоятельством для дальнейшего является прием, позволяющий исключить

входящие в эти уравнения лапласианы полей. Пусть  $\varphi(M)$  – произвольное достаточно гладкое скалярное поле. Для участвующей в наших рассуждениях области  $V$  с границей  $\Sigma$  (нормаль внутренняя) запишем интегральную теорему для лапласиана [16]:

$$\iiint_V \nabla^2 \varphi \, dV = - \iint_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, d\Sigma.$$

Здесь слева мы имеем умноженный на объем  $\Delta V$  средний лапласиан  $\langle \nabla^2 \varphi \rangle$ , а справа – умноженную на площадь  $\Delta \Sigma$  среднюю нормальную производную  $\langle \partial \varphi / \partial n \rangle$ . Применяя эту теорему к полям  $T$  и  $U$ , в асимптотическом режиме будем иметь:

$$\langle \nabla^2 T \rangle_\infty = - \frac{\Delta \Sigma}{\Delta V} \langle \partial T / \partial n \rangle_\infty; \quad \langle \nabla^2 U \rangle_\infty = - \frac{\Delta \Sigma}{\Delta V} \langle \partial U / \partial n \rangle_\infty.$$

Исключим из уравнения (9) величину  $V_\infty$  с помощью (10), и в получившееся уравнение подставим на место лапласианов полей полученные выше их выражения через нормальные производные. Рассматривая новое уравнение совместно с (12), мы будем иметь два уравнения с двумя неизвестными величинами – нормальными производными полей  $T$  и  $U$ . Разрешая эту систему, получим:

$$\begin{aligned} \langle \partial T / \partial n \rangle_\infty &= \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\Delta V}{\Delta \Sigma} \langle \bar{W} \rangle - \gamma r \langle \bar{J} \rangle_\infty \right); \\ \langle \partial U / \partial n \rangle_\infty &= \frac{\delta}{\lambda} \left( \chi r \langle \bar{J} \rangle_\infty - \frac{\Delta V}{\Delta \Sigma} \langle \bar{W} \rangle \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь мы ввели новую постоянную материала  $\chi = \gamma + \lambda / (a_m \rho_0 \delta r)$ .

Вместо величин  $\langle \bar{W} \rangle$  и  $\langle \bar{J} \rangle$ , которые не могут быть измерены непосредственно, введем  $P_{\text{свч}}$  и  $P_{\text{ик}}$  – потребляемые установкой мощности соответствующих генераторов и общую потребляемую мощность  $P = P_{\text{свч}} + P_{\text{ик}}$ . Очевидно, что

$$\langle \bar{W} \rangle = P_{\text{свч}} / \Delta V, \quad \langle \bar{J} \rangle = P_{\text{ик}} / \Delta \Sigma.$$

Выражая в (15) величину  $\langle \bar{W} \rangle$  через  $P_{\text{свч}}$ , и подставляя получившиеся выражения для нормальных производных в (13) и (14), получим итоговые формулы для характерных перепадов:

$$\begin{aligned} \Delta T^* &= \frac{C^*}{\lambda} (P_{\text{свч}} - \gamma r \langle \bar{J} \rangle_\infty \cdot \Delta \Sigma) ; \\ \Delta U^* &= \frac{C^* \delta}{\lambda} (\chi r \langle \bar{J} \rangle_\infty \cdot \Delta \Sigma - P_{\text{свч}}) \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь обозначено  $C^* = D^* / (4 \cdot \Delta \Sigma)$  – геометрическая характеристика образца.

#### РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Результат проведенного исследования заключается в формулах (16). Они связывают характерные перепады температуры и влагосодержания

$\Delta T^*$  и  $\Delta U^*$  с параметрами  $D^*$ ,  $\Delta \Sigma$  (геометрические характеристики образца);  $a_m$ ,  $\rho_0$ ,  $\delta$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$  (теплофизические характеристики материала);  $P_{\text{свч}}$  (выходная мощность СВЧ генератора);  $\langle \bar{J} \rangle_\infty$  (интенсивность сушки).

Чтобы воспользоваться этими формулами, необходимо знать интенсивность сушки  $\langle \bar{J} \rangle_\infty$ , для которой у нас нет алгоритма расчета, и, следовательно, она должна быть получена в результате измерений. Это обстоятельство можно обойти следующим образом. Подставляя в (11) значение  $\langle \partial T / \partial n \rangle_\infty$  из (15), получим после преобразований уравнение, имеющее смысл баланса энергетических потоков на поверхности образца:

$$\langle \bar{Q} \rangle_\infty + r \langle \bar{J} \rangle_\infty = P / \Delta \Sigma. \quad (17)$$

Заметим теперь, что в режимах с высокой интенсивностью сушки потери энергии за счет теплообмена с воздушным потоком оказываются обычно небольшими по сравнению с затратами энергии на испарение воды [17, 18]. Это означает, что  $\langle \bar{Q} \rangle_\infty \ll r \langle \bar{J} \rangle_\infty$ , и тогда из предыдущей формулы получим

$$r \langle \bar{J} \rangle_\infty \cdot \Delta \Sigma \approx P. \quad (18)$$

При выполнении этого условия формулы (16) принимают следующий приближенный вид:

$$\Delta T^* = \frac{C^*}{\lambda} (P_{\text{свч}} - \gamma P); \quad \Delta U^* = \frac{C^* \delta}{\lambda} (\chi P - P_{\text{свч}}). \quad (19)$$

В этих формулах переменная  $\langle \bar{J} \rangle_\infty$  исключена, и роль заменяющей ее переменной выполняет общая потребляемая мощность  $P$ .

Заметим, что перепады  $\Delta T^*$  и  $\Delta U^*$  получаются независимыми от характеристик воздушного потока. Это согласуется с точным решением задачи о сушке шара [11]: варьирование характеристик воздушного потока приводит лишь к повышению или понижению температуры поверхности шара, а перепады температуры и влагосодержания между поверхностью шара и его центром остаются при этом неизменными.

Важно отметить следующее обстоятельство. Рассмотрим множество режимов, когда  $P_{\text{свч}}$  и  $P_{\text{ик}}$  одновременно изменяются, но так, что

$$P_{\text{свч}} + P_{\text{ик}} = P = \text{const.}$$

Согласно (18), интенсивность сушки  $\langle \bar{J} \rangle_\infty$  будет в любом таком режиме одной и той же, в то время как перепады  $\Delta T^*$  и  $\Delta U^*$ , подсчитанные по формулам (19), различными. Пользуясь этим обстоятельством, можно варьированием мощности генераторов подобрать режим, в котором при заданной интенсивности сушки характерные пере-

пады температуры и влагосодержания будут соотноситься нужным для нас образом. Другой способ установления необходимого соотношения между перепадами изложен авторами в работе [19]. Вместо двух генераторов, с большой и с малой глубиной проникновения, там используется только один генератор электромагнитных волн, а выбор оптимального режима сушки осуществляется согласованным варьированием мощности этого генератора и его частоты.

Как уже отмечалось, в случае шара рассмотренная здесь задача о расчете асимптотических характеристик сушки будет иметь точное аналитическое решение, и вследствие этого полученные выше приближенные формулы приобретут точный смысл. В частности, формулы (19) будут определять перепады температуры и влагосодержания между поверхностью шара и его центром. В свою очередь, аналитические решения задач сушки для тел с простой геометрией имеют многочисленные прямые и косвенные опытные подтверждения [7, 10-12, 14, 17]. Значит, можно надеяться, что для тел, форма которых не слишком отличается от шарообразной, формулы (19) окажутся вполне пригодными для инженерных оценок.

## ВЫВОДЫ

Сформулирована начально-краевая задача для расчета полей температуры и влагосодержания в образце произвольной формы, находящемся в рабочей камере установки для сушки электромагнитным излучением. Образец расположен на вращающемся столике, он обдувается воздушным потоком и находится под воздействием излучений генераторов электромагнитных волн ИК и СВЧ диапазонов. Исследование начально-краевой задачи проведено при следующих упрощающих предположениях: теплофизические и электромагнитные характеристики влажного материала считаются постоянными; фильтрационное движение влаги, происходящее по закону Дарси, не учитывается; время оборота образца является небольшим по сравнению с характерными временами изменения полей температуры и влагосодержания и большим по сравнению со временем релаксации электромагнитных процессов; сушка рассматривается лишь в установившемся режиме, когда ее скорость почти не изменяется (режим постоянной скорости сушки). Для приближенного анализа процесса сушки выполнено осреднение исходных уравнений по времени оборота и по координатам, а также осуществлен переход к асимптотике по времени; в результате этих операций уравнения для искомых функций

были заменены соотношениями для их числовых (интегральных) характеристик. На основе этих соотношений, и с привлечением точного решения задачи об электромагнитной сушке шара, были введены параметры, названные характерными перепадами температуры и влагосодержания, которые позволяют судить о степени неоднородности данных полей. Контроль за характерными перепадами позволяет при интенсивных способах сушки избежать перегрева материала или его разрушения от

механических деформаций. Результаты работы могут быть использованы как средство инженерных оценок при разработке технологических линий и устройств для нагревания и сушки электромагнитными волнами.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 18-48-340001 p\_a.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Афанасьев А.М., Никишова А.В., Сипливый Б.Н.** Переходные процессы при сушке конвекцией и сушке инфракрасным излучением. *Изв. вузов. Химия и хим. технология.* 2017. Т. 60. Вып. 10. С. 94-101. DOI: 10.6060/tcct.20176010.5568.
2. **Рудобашта С.П., Зуева Г.А., Зуев Н.А.** Влияние термодиффузии на кинетику осциллирующей инфракрасной сушки. *Изв. вузов. Химия и хим. технология.* 2016. Т. 59. Вып. 4. С. 83-87.
3. **Натареев О.С., Кокина Н.Р., Натарева С.В.** Теплоперенос в процессе конвективной сушки влажного материала. *Изв. вузов. Химия и хим. технология.* 2015. Т. 58. Вып. 2. С. 67-72.
4. **Натареев С.В., Венкин Е.Н., Натарева О.С.** Массоперенос в процессе сушки влажного материала при конвективном подводе теплоты. *Изв. вузов. Химия и хим. технология.* 2012. Т. 55. Вып. 3. С. 104-108.
5. **Рудобашта С.П., Зуева Г.А., Карташов Э.М.** Тепло-массоперенос при сушке сферической частицы в осциллирующем электромагнитном поле. *Теор. основы хим. технологии.* 2016. Т. 50. № 5. С. 539-550. DOI: 10.7868/S0040357116050109.
6. **Рудобашта С.П., Карташов Э.М., Зуев Н.А.** Тепло-массоперенос при сушке в осциллирующем электромагнитном поле. *Теор. основы хим. технологии.* 2011. Т. 45. № 6. С. 641-647.
7. **Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н.** Обобщение понятия температуры мокрого термометра на случай электромагнитной сушки. *Инж.-физ. журн.* 2016. Т. 89. № 3. С. 610-616.
8. **Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н.** Теория электромагнитной сушки: асимптотическое решение начально-краевой задачи для прямоугольной области. *Физика волн. проц. и радиотех. системы.* 2012. Т. 15. № 1. С. 77-83.
9. **Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н.** Асимптотические распределения температуры и влагосодержания при электромагнитной сушке образца, имеющего форму прямо-угольного параллелепипеда. *Изв. вузов. Электромеханика.* 2012. № 3. С. 3-8.
10. **Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н.** Теория электромагнитной сушки: асимптотическое решение начально-краевой задачи для цилиндра. *Теор. основы хим. технологии.* 2014. Т. 48. № 2. С. 222-227. DOI:10.7868/S0040357114020018.
11. **Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н.** Задача о сушке шара электромагнитным излучением. *Инж.-физ. журн.* 2013. Т. 86. № 2. С. 322-330.
12. **Лыков А.В.** Теория сушки. М.-Л.: Энергия. 1968. 471 с.
13. **Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н.** Концепция поверхностных источников тепла в теории сушки электромагнитным излучением. *Изв. вузов. Электромеханика.* 2017. Т. 60. № 2. С. 13-20.
14. **Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н.** О краевых условиях массообмена в виде законов Ньютона и Дальтона. *Инж.-физ. журн.* 2007. Т. 80. № 1. С. 27-34.

#### REFERENCES

1. **Afanasiev A.M., Nikishova A.V., Siplivy B.N.** Transients during drying convection drying and infrared radiation. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.* 2017. V. 60. N 10. P. 94-101 (in Russian). DOI: 10.6060/tcct.20176010.5568.
2. **Rudobashta S.P., Zueva G.A., Zuev N.A.** The influence of diffusion on the kinetics of the oscillating infrared drying. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.* 2016. V. 59. N 4. P. 83-87 (in Russian).
3. **Natareev S.V., Kokina N.R., Natareev O.S.** Heat transfer in the convective drying process of moist material. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.* 2015. V. 58. N 2. P. 67-72 (in Russian).
4. **Natareev S.V., Venken E.N., Natareev O.S.** Mass transfer in drying process of moist material at convective supply of heat. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.* 2012. V. 55. N 3. P. 104-108 (in Russian).
5. **Rudobashta S.P., Zueva G.A., Kartashov E.M.** Heat and mass transfer during drying of a spherical particle in an oscillating electromagnetic field. *Teor. Osnovy Khim. Tehnol.* 2016. V. 50. N 5. P. 539-550 (in Russian). DOI: 10.7868/S0040357116050109.
6. **Rudobashta S.P., Kartashov E.M., Zuev N.A.** Heat and mass transfer during drying in an oscillating electromagnetic field. *Teor. Osnovy Khim. Tehnol.* 2011. V. 45. N 6. P. 641-647 (in Russian).
7. **Afanasiev A.M., Siplivy B.N.** Generalization of the Wet-Bulb Temperature Notion to the Case of Electromagnetic Drying. *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2016. V. 89. N 3. P. 620-626. DOI: 10.1007/s10891-016-1419-3.
8. **Afanasiev A.M., Siplivy B.N.** Electromagnetic drying theory: asymptotic solution of the initial boundary value problem for a rectangular region. *Fizika Voln. Prots. Radiotekh. Sistemy.* 2012. V. 15. N 1. P. 77-83 (in Russian).
9. **Afanasiev A.M., Siplivy B.N.** The asymptotic distribution of temperature and moisture content using electromagnetic drying of the sample, having the shape of a rectangular parallelepiped. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Elektromekhanika.* 2012. N 3. P. 3-8 (in Russian).
10. **Afanasiev A.M., Siplivy B.N.** Theory of electromagnetic drying: an asymptotic solution of an initial-boundary value problem for a cylinder. *Theor. Found. Chem. Eng.* 2014. V. 48. N 2. P. 206-211.
11. **Afanasiev A.M., Siplivy B.N.** Problem of electromagnetic drying of a sphere. *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2013. V. 86. N 2. P. 340-348.
12. **Lykov A.V.** Theory of drying. M.-L.: Energiya. 1968. 471 p. (in Russian).
13. **Afanasiev A.M., Siplivy B.N.** The concept of surface heat sources in the theory of drying by electromagnetic radiation. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Elektromekhanika.* 2017. V. 60. N 2. P. 13-20 (in Russian).

15. **Шимони К.** Теоретическая электротехника. М.: Мир. 1964. 775 с.
16. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука. 1966. 724 с.
17. **Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н.** Оптимизация процесса электромагнитной сушки капиллярно-пористых материалов. *Изв. вузов. Электромеханика*. 2006. № 5. С. 3-10.
18. **Календер'ян В.А., Бошкова И.Л., Волгушева Н.В.** Кинетика микроволновой сушки сыпучего органического материала. *Инж.-физ. журн.* 2006. Т. 79. № 3. С. 123-127.
19. **Афанасьев А.М., Сипливый Б.Н.** Оптимизация сушки электромагнитным излучением: аналитическое исследование проблемы. *Изв. вузов. Химия и хим. технология*. 2019. Т. 62. Вып. 6. С. 69-76. DOI: 10.6060/ivkkt201962fp.5870.
20. **Падохин В.А., Зуева Г.А., Кокурина Г.Н., Кочкина Н.Е., Федосов С.В.** Комплексное математическое описание тепло- и массопереноса в процессе сушки неограниченного тела цилиндрической формы аналитическими методами теории теплопроводности. *Теор. основы хим. технологии*. 2015. Т. 49. № 1. С. 54-64. DOI: 10.7868/S0040357115010108.
14. **Afanasiev A.M., Siplivy B.N.** On the boundary conditions of mass transfer in the form of Newton and Dalton laws. *Inzh.-Fiz. Zhurn.* 2007. V. 80. N 1. P. 27-34 (in Russian).
15. **Shimoni K.** Theoretical electrical engineering. M.: Mir. 1964. 775 p. (in Russian).
16. **Tikhonov A.N., Samarskiy A.A.** Equations of mathematical physics. M.: Nauka. 1966. 724 p. (in Russian).
17. **Afanasiev A.M., Siplivy B.N.** Optimization of electromagnetic drying of capillary-porous materials. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Elektromekhanika*. 2006. N 5. P. 3-10 (in Russian).
18. **Kalender'jan V.A., Boshkova I.L., Volgusheva N.V.** Kinetics of microwave drying of bulk organic material. *Inzh.-Fiz. Zhurn.* 2006. V. 79. N 3. P. 123-127 (in Russian).
19. **Afanasiev A.M., Siplivy B.N.** Optimization of drying by electromagnetic radiation: analytical study of the problem. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Khim. Khim. Tekhnol.* 2019. V. 62. N 6. P. 69-76 (in Russian). DOI: 10.6060/ivkkt201962fp.5870.
20. **Padokhin V.A., Zueva G.A., Kokurina G.N., Kochkina N.E., Fedosov S.V.** Complex mathematical description of heat and mass transfer in the drying process of an unlimited cylindrical body by analytical methods of the theory of thermal conductivity. *Teor. Osnovy Khim. Tekhnol.* 2015. V. 49. N 1. P. 54-64 (in Russian). DOI: 10.7868/S0040357115010108.

*Поступила в редакцию 14.03.2019  
Принята к опубликованию 07.08.2019*

*Received 04.03.2019  
Accepted 07.08.2019*